

1. SUCESIONES Y SERIES EN R

1.1. NÚMEROS ENTEROS Y RACIONALES

Los números que básicamente vamos a tratar son los reales. Estudiaremos sucesiones de números reales, funciones de variables reales,... Pero antes de definir los reales vamos a hacer un breve repaso de los números más sencillos:

Llamaremos $\mathbf{N}=\{1,2,3,\dots\}$ al conjunto de los números naturales, $\mathbf{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ al de los enteros, y $\mathbf{Q}=\{p/q, p \text{ y } q \text{ enteros, } q \neq 0\}$ al conjunto de los racionales. La suma y el producto de dos números naturales cualesquiera son también naturales, pero su diferencia puede no serlo. Sí es entero la diferencia de dos enteros. El cociente de racionales es racional, pero no lo es, en general, el de dos enteros. Los tres conjuntos son conjuntos ordenados por la relación ">" (ser mayor que). Con palabras más matemáticas, y refiriéndonos al mayor de los tres conjuntos, se dice que \mathbf{Q} es un cuerpo ordenado, es decir, que satisface las propiedades (a,b,c \mathbf{Q}):

Propiedades de cuerpo: Existen dos operaciones "+" y "•" que cumplen:

- 1) + y • son asociativas y conmutativas
- 2) se cumple la propiedad distributiva: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
- 3) existen elementos neutros 0 respecto a + y 1 respecto a • : $a+0 = a$, $a \cdot 1 = a$ a
- 4) existen elementos inversos respecto a + y • :
 a $-a$ tal que $a+(-a)=0$, $a \neq 0$ a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = 1$

Propiedades de orden: Existe una relación ">" que satisface:

- 5) dado a , o bien $a>0$, o bien $-a>0$ o bien $a=0$
- 6) si $a,b>0$ también $a+b>0$, $a \cdot b>0$

[A partir sólo de lo anterior se pueden definir las otras operaciones y desigualdades: $a-b=a+(-b)$; $a/b=a \cdot b^{-1}$; si $n \in \mathbf{N}$, $a^n = a \cdot \dots \cdot a$ n veces ; ... ; $b>a$ si $b-a>0$; $b<a$ si $a>b$; $b \leq a$ si $b>a$ ó $b=a$; $b \geq a$ si $a \leq b$]

[\mathbf{N} y \mathbf{Z} no son un cuerpo: \mathbf{N} no posee inverso siquiera respecto de la suma y \mathbf{Z} no lo tiene respecto al producto. El conjunto \mathbf{R} de los reales que trataremos en la próxima sección poseerá todas estas propiedades y además otra. Observemos que entre dos racionales $p>q$, por cercanos que estén, existen infinitos racionales. En efecto, $r_1=(q+p)/2$ es otro racional que se halla entre los dos. Otros infinitos son $r_2=(q+r_1)/2$, $r_3=(q+r_2)/2$, ...]

[Se supone que son conocidos los significados de los símbolos (para todo), (existe), (implica), ... y que se han visto propiedades lógicas sencillas que se utilizarán en alguna demostración como, por ejemplo, que la afirmación $p \rightarrow q$ es equivalente a la $(\text{no } q) \rightarrow (\text{no } p)$. Otros conocimientos que se presuponen son las ideas y símbolos básicos de la teoría de conjuntos: (unión), (intersección), (contenido en), (pertenece), ...]

Repasemos algunas otras definiciones y propiedades relativas a los naturales, enteros y racionales:

Demostraciones por inducción.

Supongamos que queremos demostrar una afirmación, que llamaremos $P(n)$, que depende de un número natural n . Demostrar $P(n)$ por inducción consiste en:

- i) demostrar $P(1)$ (es decir, que la afirmación es cierta si $n=1$)
- ii) demostrar que $P(n) \rightarrow P(n+1)$ n (suponiéndola cierta para n se demuestra para $n+1$)

Hecho esto, como $P(1)$ es cierta, por ii) también lo es $P(2)$. Y por tanto también $P(3)$. Y $P(4)$...

Ej. Demostremos por inducción que $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, o sea, en otros términos: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

[recordemos que el símbolo de la izquierda de la última igualdad se lee 'sumatorio de k desde 1 hasta n ']

$P(1)$ es cierta: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Probemos ahora $P(n+1)$ suponiendo cierta $P(n)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = [\text{estamos suponiendo cierta } P(n)] = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo:

Dados dos naturales n y d se dice que n es múltiplo de d (o que d es divisor de n) si n/d es también un natural. Desde luego, todo n tiene al menos dos divisores: el 1 y el propio n . Si estos son sus únicos divisores dice que n es primo. Un conjunto de enteros n_1, \dots, n_k admite siempre un divisor común a todos ellos: el 1. Se llama máximo común divisor al mayor natural que divide a todos ellos (y lo denotaremos por $\text{mcd}[n_1, \dots, n_k]$). Por otra parte, dados los n_1, \dots, n_k existen naturales que son múltiplos de todos ellos (por ejemplo el producto de todos). Se llama mínimo común múltiplo ($\text{mcm}[n_1, \dots, n_k]$) al menor número con esta propiedad.

Hallar el mcd y el mcm de una colección de naturales es fácil una vez calculados todos los divisores primos de cada uno de ellos, lo que puede ser muy largo si los números son muy gordos.

[Para hallar estos divisores conviene conocer las reglas de divisibilidad por números sencillos: recordamos que un entero es divisible por 3 (y por 9) si y sólo si lo es la suma de sus cifras; divisible por 4 (por 8) si lo son sus dos (tres) últimas cifras; por 5 si acaba en 0 o en 5; por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan un lugar par y la suma de las que ocupan lugar impar es un múltiplo de 11 (incluido el 0)].

Otra forma de hallar el $\text{mcd}[m, n]$, que tal vez no sea conocida, es utilizar el algoritmo de Euclides:

Sea $m > n$. Dividamos m entre n y llamemos q_1 al cociente y r_1 al resto: $m = q_1 n + r_1$.
 Dividamos ahora n entre r_1 : $n = q_2 r_1 + r_2$. A continuación r_1 entre r_2 : $r_1 = q_3 r_2 + r_3$.
 Proseguimos así hasta que el resto sea cero. El $\text{mcd}[m, n]$ es entonces el último resto no nulo.

Calculado el mcd , se puede hallar el mcm utilizando que: $\text{mcm}[m, n] = \frac{m \cdot n}{\text{mcd}[m, n]}$.

[Para hallar el $\text{mcd}[n_1, \dots, n_k]$ se puede calcular $m_1 = \text{mcd}[n_1, n_2]$, luego $m_2 = \text{mcd}[m_1, n_3]$, Análogo para el mcm]

Ej: Sean 2340 y 6798. Como $2340 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ y $6798 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 103$, $\text{mcd} = 6$ y $\text{mcm} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 103 = 2651220$

Euclides: $6798 = 2 \cdot 2340 + 2118$, $2340 = 1 \cdot 2118 + 222$, $2118 = 9 \cdot 222 + 120$, $222 = 1 \cdot 120 + 102$, $120 = 1 \cdot 102 + 18$,
 $102 = 5 \cdot 18 + 12$, $18 = 1 \cdot 12 + 6$, $12 = 2 \cdot 6$ $\text{mcd} = 6$, $\text{mcm} = 2340 \cdot 6798 / 6 = 2651220$.

Expresiones decimales. Existen infinitos números irracionales.

Un racional puede ser expresado de infinitas maneras diferentes como fracción p/q (de ellas, se llama irreducible a la que tiene el denominador más pequeño posible, o sea, aquella con p y q sin divisores comunes). Otra forma de precisar de forma única un racional es dar su expresión decimal, que o bien tiene sólo un número finito de decimales o bien tiene además un número finito de decimales que se repiten periódicamente ($7/8 = 0.875$ es un ejemplo de la primera situación y $8/7 = 1.142857142857\dots$ lo es de la segunda).

Pensando en la expresión decimal vuelve a estar muy claro que entre dos racionales existen otros infinitos y que podemos encontrar un racional lo próximo que queramos a otro dado. Sin embargo, a pesar de estar tan juntos, aparecen de forma natural (ya desde los griegos) otros números que no son racionales (es decir, irracionales; su expresión decimal tendrá infinitos decimales no repetidos periódicamente). Por ejemplo, el teorema de Pitágoras asegura que la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 mide $\sqrt{2}$ unidades de longitud. Es fácil probar que $\sqrt{2}$ no es racional. Para hacerlo, vamos a suponer que lo es y llegaremos a una contradicción (reducción al absurdo): sea $\sqrt{2} = p/q$ fracción irreducible. Entonces $p^2 = 2q^2$. Así p^2 es par, con lo que también debe serlo p (los cuadrados de pares son pares e impares los de los impares) y por tanto es de la forma $p = 2m$. Así pues, $2m^2 = q^2$ y q también es par, en contradicción con la suposición de que p/q fuese irreducible.

[Demostrar que otros números famosos como ϕ e e son irracionales es bastante más complicado]

Observemos que la suma z de un racional p y de un irracional x es necesariamente otro número irracional (si fuese z racional, entonces sería $x = z - p$ también racional). Y lo mismo sucede, si el racional $p \neq 0$, con su producto (se prueba casi igual; que conste que suma y producto de irracionales puede ser racional, por ejemplo, $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ y $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$). Conocemos ya, pues, infinitos irracionales: todos los de la forma $p + q\sqrt{2}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$. Con esto podemos ya ver que también entre dos racionales cualesquiera, por muy próximos que estén entre sí, existen infinitos irracionales (por ejemplo, si $p > q$ son racionales, $q + (p - q)\sqrt{2}/n$, con $n = 2, 3, \dots$, son infinitos irracionales y es fácil ver que están entre uno y otro). También entre dos irracionales hay infinitos racionales e irracionales (parece bastante claro con la expresión decimal). O entre un racional y un irracional.

1.2. EL CONJUNTO \mathbf{R}

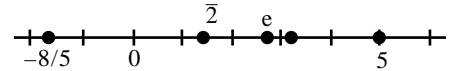
¿Qué son exactamente los números reales? Sabemos que $5, -8/5, \sqrt{2}, \dots, e, \dots$ lo son, que los tres últimos no son racionales y no se pueden expresar sin utilizar infinitos decimales, que no se pueden escribir como una fracción. Se saben resolver algunas ecuaciones con coeficientes reales, trabajar con desigualdades... Se podría trabajar sólo con esta idea intuitiva, pero en matemáticas a veces la intuición engaña. Convendría tener una definición rigurosa del conjunto \mathbf{R} de los números reales. Lo más serio (pero muy largo) sería construir los reales a partir de los racionales. Para ahorrar tiempo, definiremos \mathbf{R} como un conjunto de objetos básicos que satisfacen unas propiedades dadas que tomaremos como axiomas (si se construyese \mathbf{R} estas propiedades serían teoremas que habría que demostrar). De ellas se podrían deducir el resto de propiedades que nos permiten hacer cálculos con reales (tampoco lo haremos (seguiría siendo demasiado largo), pero es interesante leer el Spivak para ver como se hace). Así pues, definimos a partir de las propiedades vistas para \mathbf{Q} :

Axiomas del conjunto \mathbf{R}

\mathbf{R} es un conjunto que posee las propiedades 1), ..., 6) de cuerpo ordenado y además satisface el axioma del extremo superior

Este último axioma (que vemos un poco más adelante, pues exige alguna definición) será el que nos distingue \mathbf{R} de \mathbf{Q} .

Gracias al orden existente en \mathbf{R} tiene sentido la representación usual de \mathbf{R} como una línea recta, asociando a cada número real un punto de la recta. Es tan común que se utilizan indistintamente los términos "conjunto de números reales" y "recta real"; "número real" y "punto".



A partir exclusivamente de los axiomas se podrían demostrar todo el resto de propiedades de los números reales que se habrán utilizado en cursos anteriores. Repasamos sin demostrarlas algunas referentes a desigualdades, porque suele haber problemas en el trabajo con ellas:

Teor:

$a < b$	$a + c < b + c, a - c < b - c$	$a < b, c < d \implies ac < bd$, si $a, b, c, d > 0$
$a < b, c > 0$	$ac < bc, a/c < b/c$	$a/c < b/d \implies ad < bc$, si $a, b, c, d > 0$
$a < b, c < 0$	$ac > bc, a/c > b/c$	$a < b \implies 1/a > 1/b, a^2 < b^2, \sqrt{a} < \sqrt{b}$, si $a, b > 0$
$a < b, c < d$	$a + c < b + d, a - d < b - c$	$1 < a \implies a < a^2$; $0 < a < 1 \implies a > a^2$

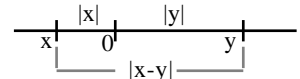
[todas las desigualdades son válidas sustituyendo los $<$ por \leq (menos los > 0 ó < 0)]

[A lo largo del curso (y como siempre se hace) \sqrt{a} representará siempre sólo la raíz positiva del número $a \geq 0$; el otro número real cuyo cuadrado es ese número a se debe representar por $-\sqrt{a}$]

A cada real x le podemos asociar un real positivo $|x|$, valor absoluto de x , definido por:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

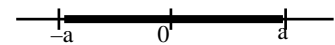
$|x|$ representa la distancia de x al origen 0 y $|x-y|$ la distancia de x a y (tanto si $x > y$ como si $y > x$)



Propiedades inmediatas a partir de la definición son: $|x|^2 = x^2$, $|x| = |-x|$, $|xy| = |x||y|$, $-|x| \leq x \leq |x|$. Probemos otras que utilizaremos en muchas ocasiones:

Teor:

Sea $a > 0$: $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$; $|x| < a \iff -a < x < a$



) si $|x| \leq a$ $-|x| \leq -a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$

) sea $-a \leq x \leq a$; si $x \geq 0$, $|x| = x \leq a$; si $x < 0$, $|x| = -x \leq a$; por tanto, para cualquier x , $|x| \leq a$ [con el $<$ estricto se demostraría igual; del teorema se deduce, desde luego, que $|x| < a \iff -a < x < a$]

Teor:

$|x+y| \leq |x|+|y|$ (desigualdad triangular); $|x-y| \leq |x|+|y|$; $||x|-|y|| \leq |x-y|$

$$(|x+y|)^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2 \implies |x+y| \leq |x|+|y|$$

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y| \implies |x|-|y| \leq |x-y|; |x-y| = |x+(-y)| \leq |x|+|y| = |x|+|y|$$


$$|x|-|y| \leq |x-y|; |y|-|x| \leq |x-y| \implies ||x|-|y|| \leq |x-y|$$

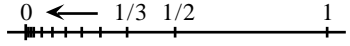
Para enunciar el axioma del extremo superior necesitamos unas definiciones previas:

Un conjunto $A \subset \mathbf{R}$ se dice acotado superiormente si existe $K \in \mathbf{R}$ tal que $a \leq K$ para todo $a \in A$
 Un conjunto $A \subset \mathbf{R}$ se dice acotado inferiormente si existe $K \in \mathbf{R}$ tal que $a \geq K$ para todo $a \in A$
 A un K con esa propiedad se le llama cota superior (inferior) de A
 $A \subset \mathbf{R}$ se dice acotado si lo está superior e inferiormente ($\exists K$ tal que $|a| \leq K \quad \forall a \in A$)

Por ejemplo $\mathbf{R}^+ = \{x: x \geq 0\}$ no está acotado, aunque si lo está inferiormente (por $-$, por el propio $0 \dots$)

\mathbf{Z} no está acotado ni superior, ni inferiormente.

$A = \{x: 0 \leq x < 7\}$  está acotado $\left[\begin{array}{l} \text{cotas superiores: } \sqrt{93}, 7 \text{ (la menor), } \dots \\ \text{cotas inferiores: } -13, 0 \text{ (la mayor), } \dots \end{array} \right]$

$B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}$  también lo está $\left[\begin{array}{l} \text{cotas superiores: } 1 \text{ (la menor), } \dots \\ \text{cotas inferiores: } -3, 0 \text{ (la mayor), } \dots \end{array} \right]$

Extremo superior (o supremo) de un conjunto es la menor de sus cotas superiores. Matemáticamente:

$S \in \mathbf{R}$ es el extremo superior o supremo de A [$\sup A$] si:

i) S es cota superior de A , ii) si K es cota superior de A entonces $S \leq K$

[análogamente se define extremo inferior o ínfimo de A [$\inf A$], mayor de las cotas inferiores]

El $\sup A$ puede pertenecer o no a A ; si pertenece se le llama máximo, es decir:

$M \in \mathbf{R}$ es el máximo de A [$\max A$] si $M \in A$ y $a \leq M$ para todo $a \in A$ (análogamente, $\min A$)

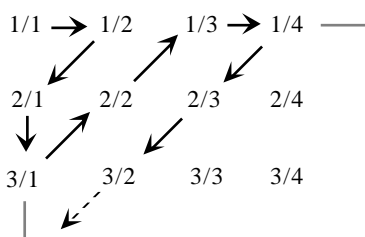
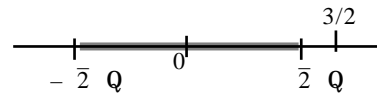
7 es el supremo del A de antes (es cota superior y no hay cotas más pequeñas), pero no es máximo, pues $7 \notin A$; 0 es su mínimo (y por tanto, su ínfimo). Para el conjunto B , 1 es el máximo (y supremo) y 0 el ínfimo (no mínimo).

Axioma del extremo superior:

Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente posee extremo superior

[no es difícil demostrar que la afirmación: "todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente posee extremo inferior" es equivalente al axioma]

Este axioma precisa la idea intuitiva de que los números reales "lleen del todo" la recta real. Como ocurriría con los racionales, se tiene que entre todo par de reales distintos existen infinitos reales (infinitos racionales e infinitos irracionales). Pero a pesar de que los elementos de \mathbf{Q} también están "tan cerca unos de otro como queramos", sin embargo dejan "huecos" entre ellos (los puntos ocupados por los infinitos irracionales). Por eso hay conjuntos acotados en \mathbf{Q} que no tienen supremo. Por ejemplo, $\{x \in \mathbf{Q} : x^2 < 2\}$ es un subconjunto de \mathbf{Q} con cotas superiores racionales ($3/2$, por ejemplo) pero no existe ninguna en \mathbf{Q} que sea la más pequeña. Dada cualquier cota racional siempre puedo encontrar otra menor (más cercana al irracional $\sqrt{2}$). El mismo conjunto, visto como subconjunto de \mathbf{R} debe tener supremo: $\sqrt{2}$ lo es.




Aunque hay infinitos racionales e infinitos irracionales el número de irracionales es un infinito "mayor" que el de los racionales (dos conjuntos, finitos o infinitos, tienen el mismo número de elementos si se puede hacer una biyección entre ellos). El número de racionales es el mismo que el de enteros (o el de naturales, que también es el mismo), ya que se puede hacer corresponder cada entero un racional y viceversa (matemáticamente se dice que \mathbf{Q} es numerable) como sugiere el esquema de la izquierda. Los irracionales (y por tanto los reales), sin embargo, no se pueden poner en biyección con \mathbf{N} (pero esto es algo más difícil probarlo).

Los siguientes subconjuntos de \mathbf{R} nos van a aparecer un montón de veces en el curso:

Intervalos: dados $a < b$ se define:

intervalo abierto $(a,b) = \{x: a < x < b\}$; intervalo cerrado $[a,b] = \{x: a \leq x \leq b\}$

a y b no pertenecen  a y b sí pertenecen 

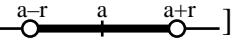
Y también:

$[a,b) = \{x: a \leq x < b\}$; $(a,b] = \{x: a < x \leq b\}$
 $(a,) = \{x: a < x\}$; $[a,) = \{x: a \leq x\}$
 $(- , b) = \{x: x < b\}$; $(- , b] = \{x: x \leq b\}$

[no es ningún número real, es sólo notación]

Los intervalos abiertos y cerrados son casos particulares de un tipo de conjuntos importantes en matemáticas más avanzadas: los conjuntos abiertos y cerrados. Vamos a definirlos ($a, p, r \in \mathbf{R}$, $A \subseteq \mathbf{R}$).

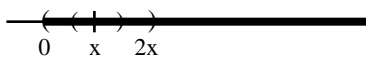
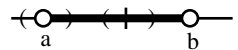
Llamaremos entorno de centro a y radio $r > 0$ a $B(a,r) = \{x: |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$

[es decir, al intervalo abierto de longitud $2r$ centrado en a : 

Def:

Sea $A \subseteq \mathbf{R}$ y $a \in A$. a es punto interior a A si existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq A$.
 A es abierto si todos sus puntos son interiores.

Ejemplos: $[a,b]$ no es abierto porque no todos sus puntos son interiores; hay dos de ellos que no lo son: a y b (los demás sí lo son); por muy pequeño que tomemos r , $B(a,r)$ no está contenido en $[a,b]$ (hay puntos de $B(a,r)$, los de la izquierda de a , que no están en $[a,b]$).



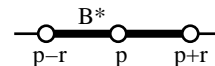
$(0, 2x)$ sí es abierto, pues todos sus puntos son interiores. En efecto, sea $x \in (0, 2x)$. $r = x$ (o cualquier otro real $< x$) tal que $B(x,r) = (0, 2x)$.

Def:

Sea $A \subseteq \mathbf{R}$. p es punto de acumulación de A si en todo entorno de p existen puntos de A distintos de p .

[p no tiene que estar en A]

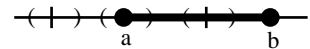
Es decir, si llamamos $B^*(p,r) = B(p,r) - \{p\} = \{x: 0 < |x-p| < r\}$,
 p es de acumulación de A si $r > 0$, $A \cap B^*(p,r) \neq \emptyset$.



Def:

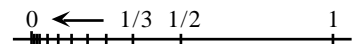
A es cerrado si contiene a todos sus puntos de acumulación

Ejemplos: $[a,b]$. Localicemos sus puntos de acumulación: cualquier $c \in [a,b)$ no es de acumulación, ya que un entorno suyo suficientemente pequeño no contiene ningún punto del intervalo; todo $c \in [a,b]$ (incluidos a y b) es de acumulación pues cualquier entorno suyo contiene puntos de $[a,b]$. Como $[a,b]$ contiene a todos sus puntos de acumulación, es cerrado.



$(0, 1)$ no es cerrado, pues $0 \in (0, 1)$ y es de acumulación del conjunto.

$\{1/n: n \in \mathbf{N}\}$ tiene un único punto de acumulación (el 0) que no pertenece al conjunto: no es cerrado. Ni abierto, pues ninguno de sus puntos es interior.



Teor:

A es cerrado si y solo si su complementario $\mathbf{R} - A$ es abierto

Sea A cerrado: tomemos cualquier $a \in \mathbf{R} - A$. a no es de acumulación de A .
 r tal que $B(a,r) \cap A = \emptyset$. $B(a,r) \subseteq \mathbf{R} - A$. $\mathbf{R} - A$ es abierto.

Sea $\mathbf{R} - A$ abierto. Probemos que A es cerrado probando: " $a \in \mathbf{R} - A$ no es de ac. de A ":

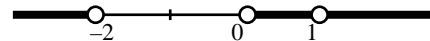
sea $a \in \mathbf{R} - A$. $\mathbf{R} - A$ abierto $\Rightarrow r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq \mathbf{R} - A$. $B(a,r) \cap A = \emptyset$. a no es de acumulación.

Unos ejercicios de repaso de todo lo anterior. Los primeros para repasar desigualdades y valores absolutos:

Determinemos todos los reales x que satisfacen:

$$x^2 + \frac{2}{x} > 3$$

Si $x=0$, no está definido. Además:



si $x > 0$, la desigualdad equivale a $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) > 0$ todo $x > 0$ con $x \neq 1$.

si $x < 0$, cambia la desigualdad: $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) < 0$ todo $x < -2$.

Resumiendo, los x buscados son: $\{x: x < -2 \text{ ó } 0 < x < 1 \text{ ó } x > 1\} = (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

$$|\sqrt{x} - 2| = x$$

Si $x < 0$, la raíz no está definida. Desarrollando (para $x \geq 0$) el valor absoluto tenemos:

$$x = |\sqrt{x} - 2| = \begin{cases} \sqrt{x} - 2 & \text{si } \sqrt{x} \geq 2, \text{ es decir, si } x \geq 4 \\ 2 - \sqrt{x} & \text{si } \sqrt{x} < 2, \text{ es decir, si } 0 \leq x < 4 \end{cases}$$

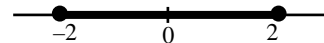
$$\begin{aligned} \sqrt{x} = x + 2 & \text{ si } x \geq 4 & x^2 + 3x + 4 = 0 \\ \sqrt{x} = 2 - x & \text{ si } 0 \leq x < 4 & x^2 - 5x + 4 = 0 \end{aligned}$$

El primero de los polinomios de segundo grado no se anula para ningún x real. El segundo para dos valores $x=1$, $x=4$ (ambos en el intervalo $[0, 4]$ en que estamos trabajando). Pero sólo es válido $x=1$ ($|1-2|=1$).

El otro real $x=4$ no cumple la igualdad: $|2-2| \neq 4$ (nos lo hemos inventado al elevar al cuadrado).

$$|x^2 - 1| \leq 3$$

$$-3 \leq x^2 - 1 \leq 3 \quad -2 \leq x^2 \leq 4$$



La primera desigualdad se da siempre y la segunda si $|x| \leq 2$, o sea si $x \in [-2, 2]$.

Podemos llegar a lo mismo discutiendo las posibilidades del valor absoluto (más largo):

$$3 \leq |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } |x| \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 1 \geq 3 & \text{ si } |x| \geq 1 & x^2 \geq 4 & \text{ si } |x| \geq 1 & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 1 - x^2 \geq 3 & \text{ si } |x| < 1 & x^2 \leq -2 & \text{ si } |x| < 1 & \text{todo } |x| < 1 \end{aligned}$$

Probemos ahora que para todo x se cumple $-8 \leq |x-5| - |x+3| \leq 8$.

Los teoremas vistos aseguran que $|x|-5 \leq |x-5| \leq |x|+5$ y que $|x|-3 \leq |x+3| \leq |x|+3$. Por tanto:

$$|x-5| - |x+3| \leq |x|+5 - [|x|-3] = 8 \text{ (mayor-menor)} \quad \text{y} \quad |x-5| - |x+3| \geq |x|-5 - [|x|+3] = -8 \text{ (menor-mayor)}$$

También lo podríamos hacer expresando los valores absolutos según los valores de x :

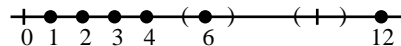
$$|x-5| - |x+3| = \begin{cases} 5-x - (-x-3) = 8 & \text{si } x \leq -3 \\ 5-x - (x+3) = 2-2x & \text{si } -3 < x < 5 \\ x-5 - (x+3) = -8 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Si $x \leq -3$ o si $x \geq 5$ se satisface. Además, si $-3 < x < 5$: $-6 \leq 2x \leq 10$, $-10 \leq -2x \leq 6$, $-8 \leq 2-2x \leq 8$

Estudiemos ahora si los siguientes conjuntos tienen supremo, ínfimo, máximo o mínimo, y si son abiertos o cerrados:

$$A = \{n \in \mathbf{N} : n \text{ es divisor de } 12\}$$

. Es decir, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.



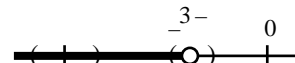
1 es el mínA (y por tanto su ínfimo). 12 es el máxA (y su supremo).

A no es abierto porque no todos sus puntos son interiores (ninguno lo es).

Es cerrado, pues contiene a todos sus puntos de acumulación (al conjunto A no hay ninguno).

$$B = \{x : x^3 < -\sqrt[3]{-}\}$$

. Es decir, $B = (-\sqrt[3]{-}, -\sqrt[3]{-})$. No tiene ínfimo (ni mínimo).



El supremo es $-\sqrt[3]{-}$ (pero no es máximo). B es abierto (todos sus puntos son interiores).

B no es cerrado pues uno de sus puntos de acumulación ($-\sqrt[3]{-}$) no pertenece a B.

1.3. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

$\{a_n\} = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ es una sucesión: a cada natural n corresponde un real. Matemáticamente:

Def:

Una sucesión de números reales es una función de \mathbf{N} en \mathbf{R}

$a: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$
 $n \mapsto a(n) = a_n$

Una sucesión tiene por límite a si en cualquier entorno de a están todos los términos de la sucesión salvo un número finito. Por ejemplo $\{1/n\} = 1, 1/2, 1/3, \dots$ tiende hacia 0 ya que fijado un entorno cualquiera del origen todos los términos de la sucesión a partir de uno dado acaban metiéndose dentro. Precizando:

Def:

$\{a_n\}$ tiene por límite $a \in \mathbf{R}$ (o tiende hacia a o converge hacia a) si para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo natural $n > N$ es $|a_n - a| < \epsilon$. Lo representaremos por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{ó} \quad a_n \xrightarrow{n} a$$

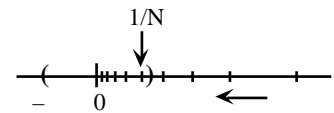
Si una sucesión $\{a_n\}$ no es convergente se dice divergente.

[El N de la definición no es único: si $|a_n - a| < \epsilon$ para $n > N$, también lo es para $n > N^*$ si $N^* > N$].

Formalicemos que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$: dado cualquier ϵ (por pequeño que sea)

existe un N tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$. Por tanto, si $n > N$, $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$

Como se ve, el N depende del ϵ elegido (si $\epsilon = 0.01$, basta tomar $N = 101$, pero para $\epsilon = 0.0001$ debemos tomar $N = 10001$ o un número mayor).



Una sucesión divergente, por ejemplo, es la $\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \dots$ pues está claro que no todos sus términos a partir de un N están en un entorno de -1 , ni de 1 , ni de cualquier otro real. Aunque haya infinitos términos de la sucesión cerca de 1 (por ejemplo) hay otros infinitos que se escapan.

Teor:

$\{a_n\}$ convergente $\iff \{a_n\}$ acotada

No es cierto que toda sucesión acotada sea convergente. Por ejemplo, $\{(-1)^n\}$ está acotada y es divergente.

Sea $\epsilon = 1$ (por fijar un número); sabemos que $\exists N$ tal que si $n > N$ $|a_n| - |a| = |a_n - a| < 1$, $|a_n| < |a| + 1$. Por tanto, si llamamos $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$ entonces $|a_n| \leq M$ $\forall n$.

Definimos ahora un par de tipos importantes de sucesiones divergentes (y no acotadas):

Def:

$\{a_n\}$ diverge hacia $+\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$) si $\forall K \in \mathbf{R}$ $\exists N$ tal que $n > N$ se tiene que $a_n > K$
 $\{a_n\}$ diverge hacia $-\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$) si $\forall K \in \mathbf{R}$ $\exists N$ tal que $n > N$ se tiene que $a_n < K$

[$+\infty$ y $-\infty$ son sólo símbolos, no son números; estas sucesiones no convergen a ningún número real]

Por ejemplo, $\frac{n^2+1}{2n}$ diverge hacia $+\infty$ pues $\frac{n^2+1}{2n} > K$ si $n > N$ con N cualquier natural $> 2K$.

$-1, 0, -2, 0, -3, 0, -4, \dots$ no diverge hacia $-\infty$ (a pesar de que contenga términos tan pequeños como queramos).

Def:

$\{a_n\}$ es creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$
 $\{a_n\}$ es decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$
 Cualquiera de las dos se dice monótona

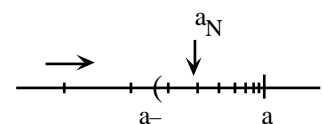
Ej: $1^3, 2^3, 3^3, \dots$ (no acotada, divergente hacia $+\infty$)

Ej: $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ (tiende hacia 0)

Teor:

$\{a_n\}$ creciente y acotada superiormente $\implies \{a_n\}$ convergente
 $\{a_n\}$ decreciente y acotada inferiormente $\implies \{a_n\}$ convergente

El axioma del extremo superior asegura que $\{a_n\}$ tiene supremo al que llamamos a . Veamos que a es el límite de $\{a_n\}$: Sea $\epsilon > 0$, N tal que $a_N > a - \epsilon$ (si no, existirían cotas más pequeñas que a). Por tanto, si $n > N$, $a - \epsilon < a_n \leq a$ $\implies |a_n - a| = a - a_n < \epsilon$. [Análoga la otra]



Dada $\{a_n\}$, se llama subsucesión de $\{a_n\}$ a cualquier sucesión formada escogiendo ordenadamente infinitos términos de $\{a_n\}$, es decir:

Def: $\{a_{n_j}\} = a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ con los n_j naturales tales que $n_1 < n_2 < \dots$ es subsucesión de $\{a_n\}$

Por ejemplo, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$, $1, \frac{1}{11}, \frac{1}{111}, \dots$ ó $\frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \dots$ son subsucesiones de $\{\frac{1}{n}\}$.

Está claro que si $\{a_n\}$ a también cualquier subsucesión suya $\{a_{n_j}\}$ a.

(Por tanto, si alguna subsucesión no tiene límite o si dos subsucesiones distintas convergen hacia distintos límites, la sucesión de partida no puede tener límite).

A las subsucesiones de las sucesiones divergentes pueden pasarle, sin embargo, todo tipo de cosas. Por ejemplo, $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots$ tiene subsucesiones convergentes a infinitos límites distintos (a cada número natural), otras que divergen a $+$ y otras que no tienen límite ni finito ni infinito; $-1, 0, -2, 0, -3, 0, -4, \dots$ tiene subsucesiones que tienden a 0 y otras a $-$; $1, 2, 3, 4, \dots$ no tiene subsucesiones convergentes...

El teorema siguiente es uno de esos típicos de matemáticas que aseguran que existe algo pero no nos dicen ni cómo es ese algo ni como buscarlo (y parecen no servir para nada; pero éste nos aparecerá en la demostración de algún teorema).

Teor: Toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente

$c_0 [\dots] b_0$

Como $\{a_n\}$ está acotada, existe un intervalo cerrado $[c_0, b_0]$ $\{a_n\}$. Dividimos $[c_0, b_0]$ en dos intervalos iguales. Uno de ellos, al menos, contiene infinitos términos de $\{a_n\}$. Le llamamos $[c_1, b_1]$. Volvemos a dividir y a elegir $[c_2, b_2]$ con infinitos $a_n \dots$. Tenemos así una sucesión de intervalos $[c_k, b_k]$, cada uno con infinitos términos de la sucesión. La sucesión c_0, c_1, \dots es creciente y acotada superiormente por b_0 . La b_0, b_1, \dots es decreciente y está acotada inferiormente por c_0 . Así ambas tienen límite y es intuitivamente claro que el límite de las dos es el mismo. Le llamamos a . Construimos una subsucesión de $\{a_n\}$ que tiende hacia a : elegimos $a_{n_0} [c_0, b_0]$, $a_{n_1} [c_1, b_1]$ con $n_1 > n_0$ (podemos pues hay infinitos a_n en $[c_1, b_1]$),... No es difícil formalizar que $a_{n_j} \rightarrow a$.

$c_1 [\dots] b_1$

$c_2 [\dots] b_2$

$c_3 [\dots] b_3$

|

La siguiente definición tampoco tiene mucha utilidad práctica, pero es importante en matemáticas mas avanzadas:

Def: $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N}$ tal que $n, m \geq N$ se tiene que $|a_n - a_m| < \epsilon$

[la diferencia entre dos términos suficientemente altos es tan pequeña como queramos]

Parece claro que si los términos de una sucesión se acercan a un límite se acercarán también entre sí, es decir, que toda sucesión convergente va a ser de Cauchy. Y lo contrario también es cierto para las sucesiones en \mathbf{R} :

Teor: $\{a_n\}$ converge $\iff \{a_n\}$ es de Cauchy

) Sea $\epsilon > 0$, $N/k \in \mathbf{N}$ $|a_k - a| < \frac{\epsilon}{2}$; por tanto, si $n, m \geq N$, $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

) Se puede probar que: $\{a_n\}$ es de Cauchy $\iff \{a_n\}$ acotada (demostración parecida a la de convergentes)

Así pues, existe subsucesión $\{a_{n_j}\}$ convergente hacia un a . Veamos que toda la sucesión $\{a_n\} \rightarrow a$:

$\{a_n\}$ de Cauchy $\implies \exists N_1 \forall n, n_j \geq N_1 \quad |a_n - a_{n_j}| < \epsilon/2$; $\{a_{n_j}\}$ convergente $\implies \exists N_2 \forall n_j \geq N_2 \quad |a_{n_j} - a| < \epsilon/2$

Por lo tanto: $|a_n - a| = |a_n - a_{n_j} + a_{n_j} - a| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$ si $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$.

[Un conjunto se dice completo si toda sucesión de Cauchy converge hacia un elemento del conjunto. Acabamos de ver que \mathbf{R} lo es. Pero, por ejemplo, \mathbf{Q} no lo es: hay sucesiones de Cauchy en \mathbf{Q} que no convergen a un racional (como la $3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \dots$ obtenida añadiendo decimales de π , que es de Cauchy pero su límite se escapa de \mathbf{Q}). Ello se debe a la inexistencia en \mathbf{Q} del axioma del extremo superior].

Un último sencillo resultado que relaciona los conjuntos cerrados y las sucesiones y que también utilizaremos:

Teor: Si $\{a_n\} \rightarrow a$ y $\{a_n\} \in A$ cerrado $a \in A$ [para abiertos es falso: hay sucesiones contenidas en un A abierto cuyo límite $\notin A$, como la $\{1/n\} \rightarrow (0,1)$]

Pues el límite de una sucesión es un punto de acumulación de ella, y, por tanto, también de A que es cerrado.

CÁLCULO DE LÍMITES DE SUCESIONES

El cálculo de límites con ∞ y N es, en general, muy complicado. Pero, por suerte, se pueden probar una serie de teoremas que permitirán calcular un montón de límites sin acudir a la definición.

Teor: Si $\{a_n\} \rightarrow a$ y $\{b_n\} \rightarrow b$ entonces:

$$\{a_n + b_n\} \rightarrow a + b, \{a_n - b_n\} \rightarrow a - b, \{a_n b_n\} \rightarrow ab \text{ y si } b \neq 0, \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \rightarrow \frac{a}{b}$$

+) Dado $\epsilon > 0$, $N_a / n \geq N_a$ $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ y $N_b / n \geq N_b$ $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$
 Por tanto, $|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon$ si $n \geq N = \max\{N_a, N_b\}$

–) Casi igual que +)

*) $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n - a||b_n| + |b_n - b||a|$. Hagamos pequeño esto:

Como $\{b_n\} \rightarrow b$, dado $\epsilon > 0$, $N_b / n \geq N_b$ $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|}$ si $a \neq 0$ (y si $a = 0$, $|b_n - b||a| = 0 < \frac{\epsilon}{2}$)

$\{b_n\}$ convergente está acotada: $B/|b_n| < B$ y como $\{a_n\} \rightarrow a$, $N_a / n \geq N_a$ $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2B}$

Por tanto: $|a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2B} + \frac{\epsilon}{2|a|} = \epsilon$

/) $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|a_n b - ab_n + ab_n - ab|}{|b b_n|} = \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a||b_n - b|}{|b||b_n|} < \frac{\epsilon}{2K} + \frac{|a||b|K}{2|a||b|K} = \epsilon$ si $n \geq N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ donde:
 como $\{b_n\} \rightarrow b \neq 0$, $N_1 / n \geq N_1$ $|b_n| > K > 0$,
 como $\{b_n\} \rightarrow b$, $N_2 / n \geq N_2$ $|b_n - b| < \frac{|b|K}{2|a|}$ y como $\{a_n\} \rightarrow a$, $N_3 / n \geq N_3$ $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$

Las operaciones que involucran las sucesiones que tienden a $+$ o $-$ son sólo algo más complicadas y vienen a formalizar la forma intuitiva en que se trabaja con los infinitos:

Teor: Sean $\{c_n\} \rightarrow 0$, $\{p_n\} \rightarrow p > 0$, $\{q_n\} \rightarrow q < 0$, $\{a_n\}$ acotada, $\{i_n\} \rightarrow \infty$. Entonces:

$$\{a_n + i_n\} \rightarrow \infty, \{a_n - i_n\} \rightarrow -\infty, \{c_n a_n\} \rightarrow 0, \{a_n / i_n\} \rightarrow 0,$$

$$\{p_n i_n\} \rightarrow \infty, \{q_n i_n\} \rightarrow -\infty, \{i_n / p_n\} \rightarrow \infty, \{i_n / q_n\} \rightarrow -\infty, \dots$$

[como $\{c_n\}$, $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ están acotadas, los resultados con la $\{a_n\}$ son también ciertos con ellas]

Demostremos para no cansarnos demasiado sólo un par de ellas, por ejemplo la primera y la última:

Sea $|a_n| \leq A$, para todo K , $a_n + i_n > A + K$, pues $i_n \rightarrow \infty$, si n es suficientemente grande.

Si n grande $i_n > 0$ y $Q / Q < q_n < 0$ para todo K , $i_n / q_n < i_n / Q < K$, pues $i_n > QK$ si n grande.

Podríamos abreviar el teorema (¡pero recordando que es sólo una notación!) escribiendo:

"acot \pm $\rightarrow \pm$ ", "0.acot=0", "acot/ $\rightarrow 0$ ", "1. \rightarrow ", "(-1). $\rightarrow -$ ", "1/1 \rightarrow ", "1/(-1) $\rightarrow -$ ", ...

y otros no escritos para no alargar mucho el teorema: " \pm $\rightarrow \pm$ ", " \pm $\rightarrow \pm$ ", "(-1).(-) \rightarrow ", ...

Es tentador escribir también " $1/0 =$ ", pero esto es falso en general [$\{(-1)^n/n\} \rightarrow 0$ pero su inversa $\{(-1)^n n\}$ no tiene límite]. Sí es cierto que si $\{c_n\} \rightarrow 0$ y $c_n > 0$, $\{p_n/c_n\} \rightarrow \infty$.

Otra serie de límites (los que involucren potencias, logaritmos o funciones trigonométricas) los podremos atacar gracias al estudio de límites de funciones. De hecho, hasta entonces no tendremos bien definido el significado de p^b si b no es racional. Por ahora, admitimos unos cuantos límites:

Teor: Sean $\{b_n\} \rightarrow b$, $\{c_n\} \rightarrow 0$, $\{p_n\} \rightarrow p > 0$, $\{q_n\} \rightarrow q < 0$, $\{i_n\} \rightarrow \infty$. Entonces:

$$\sin\{b_n\} \rightarrow \sin b, \cos\{b_n\} \rightarrow \cos b, \ln\{p_n\} \rightarrow \ln p, \ln\{i_n\} \rightarrow \infty, \{p_n^{b_n}\} \rightarrow p^b,$$

$$\{i_n^{p_n}\} \rightarrow \infty, \{i_n^{q_n}\} \rightarrow 0, \{p_n^{i_n}\} \rightarrow \infty \text{ si } p > 1, \{p_n^{i_n}\} \rightarrow 0 \text{ si } 0 < p < 1, \{(1+c_n)^{1/c_n}\} \rightarrow e$$

[esta última, por ejemplo, se deducirá del hecho de que la función $(1+x)^{1/x} \rightarrow e$ cuando $x \rightarrow 0$. El número $e = 2.7182818...$ lo podríamos definir ya como el límite de la sucesión $(1+1/n)^n$ (se puede probar que es creciente y acotada superiormente) pero lo definiremos de forma más rápida más adelante].

A pesar de todos estos teoremas aún quedan las llamadas indeterminaciones que resumimos:

$$\boxed{-\infty, 0, \frac{0}{0}, -\infty, 1, 0^0, \infty}$$

Como siempre hay que interpretar estos símbolos en términos de sucesiones. Por ejemplo, la primera dice que si dos sucesiones tienden a infinito no se puede, en principio, asegurar hacia qué tiende su diferencia (por ejemplo $n - n^2 \rightarrow -\infty$, $n - n \rightarrow 0$ y $n^2 - n \rightarrow \infty$). Para resolver alguna indeterminación puede bastar un truco algebraico, pero en muchos casos se necesitan técnicas de límites de funciones como L'Hôpital o Taylor y habrá que esperar hasta saber calcular el límite.

Ejemplos. Gracias a todo el trabajo con los de los teoremas ahora ya casi nunca habrá que acudir a la definición.

$$\frac{3n^2 + (-1)^n}{n^3 + 2n} = \frac{3/n + (-1)^n/n^3}{1 + 2/n^2} \quad \frac{0}{1} = 0, \quad \frac{3n^3 + (-1)^n}{n^3 + 2n} = \frac{3 + (-1)^n/n^3}{1 + 2/n^2} \quad \frac{3}{1} = 3, \quad \frac{3n^4 + (-1)^n}{n^3 + 2n} = \frac{3n + (-1)^n/n^3}{1 + 2/n^2} \quad \frac{\infty}{1} = \infty$$

[las tres eran indeterminaciones y hemos tenido que reescribir la sucesión; en el cálculo hemos utilizado varios teoremas: $n^3 = n \cdot (n \cdot n)$ porque el producto de dos sucesiones que tienden a ∞ tiende a ∞ ; $(-1)^n/n^3 \rightarrow 0$ porque "acotado/ $\infty \rightarrow 0$ "; $3 + (-1)^n/n^3 \rightarrow 3$ porque la suma de sucesiones tiende a la suma de los límites; límites de cocientes, más límites con ...]

$$\frac{\sqrt{n^3 - 1} - n}{n^2 - 7\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1 - 1/n^3} - 1/\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 7/n} \quad \frac{1 - 0}{-0} = 0, \quad \text{o bien,} \quad \frac{\sqrt{n^3 - 1} - n}{n^2 - 7\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1/n - 1/n^4} - 1/n}{1 - 7/n\sqrt{n}} \quad \frac{0 - 0}{1 - 0} = 0$$

[aquí hemos utilizado además que $\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\lim a_n}$ y " $\sqrt{\quad} = \quad$ " que son casos particulares de los límites de potencias vistos; lo probaremos directamente en problemas].

Como se ve, para calcular límites de cocientes de polinomios y raíces basta comparar los términos con la máxima potencia de numerador y denominador (y se podrán hacer a ojo).

$$\sqrt{n^3 - 1} - n = n[\sqrt{n - 1/n^2} - 1] \quad \text{"} \cdot (-1) = \text{"} \quad \text{[hemos sacado factor común para dejar claro que término manda]}$$

$$\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{[\sqrt{n} - \sqrt{n+1}][\sqrt{n} + \sqrt{n+1}]}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \rightarrow 0 \quad \text{[los } \sqrt{n} \text{ eran del mismo orden y hemos tenido que racionalizar]}$$

$$\frac{1 + \dots + n}{n^2 + 1} = \frac{n(n+1)}{2(n^2 + 1)} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{[el número de sumandos crece con } n; \text{ no es cierto que como } \frac{n}{n^2} \rightarrow 0 \text{ nuestra sucesión también}]$$

$$[(-1)^n + \sqrt{n}]^3 \quad \text{"(acotado)}^3 = 3 = \text{"} \quad ; \quad n^{1/n-1} \rightarrow -1 = 0 \quad ; \quad \left[\frac{6n+1}{3n+2}\right]^{-n^2} \rightarrow \frac{1}{2} = 0$$

$$\left[\frac{3n^2+1}{3n^2+2}\right]^{-n^2} = \left[\left(1 - \frac{1}{3n^2+2}\right)^{-(3n^2+2)}\right]^{n^2/(3n^2+2)} \rightarrow e^{1/3} \quad \text{[como } 1/1 \text{ indeterminación, buscamos el número } e]$$

$$\frac{3^{n+2} + 1}{3^{n+1} + 2^n} = \frac{1 + 2(2/3)^n}{3 + 2(2/3)^n} \rightarrow \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{n^2}{(n-7)!} = \frac{n^2}{(n-7)(n-6)(n-5)!} \rightarrow 0 \quad \text{(recordamos que } n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)$$

$$(-1)^n \frac{13n}{n+1} \text{ no converge, pues tiene subsucesiones con diferentes límites (los pares } \rightarrow 13, \text{ los impares } \rightarrow -13)$$

{senn} = 0.8415..., 0.9093..., 0.1411..., -0.7568..., -0.9589..., -0.2794..., 0.6560..., 0.9894..., 0.4121..., ...
[las funciones trigonométricas siempre se escriben en radianes]; parece que no va a tener límite y se prueba (no es nada fácil) que es así; como es acotada, tendrá subsucesiones convergentes, pero no sabemos cuáles.

Calculemos el límite de a^n para todos los valores de a sin hacer uso del teorema no demostrado:

si $a > 1$, $a = 1 + h$, con $h > 0$, $a^n = (1 + h)^n = 1 + nh + \dots > nh > K \quad K$ si n gordo a^n

si $a = 1$, $\{1^n\} = 1, 1, 1, \dots \rightarrow 1$; si $a \in (0, 1)$, $1/a > 1$, $a^n = 1/(1/a)^n \rightarrow 0$; si $a = 0$, $\{0^n\} = 0, 0, 0, \dots \rightarrow 0$

si $a \in (-1, 0)$, $a^n = (-1)^n(-a)^n \rightarrow 0$; si $a = -1$, $\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \dots$ diverge

si $a < -1$, $a^n = (-1)^n(-a)^n$, con $(-a)^n \rightarrow \infty$: a^n toma valores grandes positivos y negativos; diverge.

Admitimos dos últimos límites que necesitaremos en series (se deducirán de los límites de funciones):

$$\boxed{\frac{\ln n}{n^a} \rightarrow 0, \quad a > 0; \quad \boxed{\sqrt[n]{n} \rightarrow 1} \quad (\text{por L'Hôpital será } \lim_x \frac{\ln x}{x^a} = \lim_x \frac{1/x}{ax^{a-1}} = 0 \quad x^{1/x} = e^{\ln x/x} \rightarrow e^0 = 1)$$

1.4. SERIES DE NÚMEROS REALES

Queremos hacer "sumas de infinitos números reales", llamadas series: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Por ejemplo, "sumemos" $1/5 + 1/5^2 + 1/5^3 + 1/5^4 + 1/5^5 + \dots$. Sumar un número finito de términos siempre se puede: la suma de los 2 primeros es 0.24, la de los 5 primeros es 0.24992, la de los 10 es 0.249999744, ... Pero carece de sentido "sumar infinitas veces". Cuando aparece la palabra "infinito" en matemáticas se acude al concepto de límite. Dada una serie, siempre podemos hacer la suma de los k primeros términos, que llamaremos k -ésima suma parcial $S_k = a_1 + \dots + a_k$. Parece natural decir que la suma de los infinitos a_n será el límite de la sucesión $\{S_k\}$. En el ejemplo anterior parece que este límite existe y parece ser 0.25, pero este límite pudiera no existir para otras series. Así, para la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ las sumas parciales van siendo $S_1=1, S_2=0, S_3=1, S_4=0, \dots$, sucesión divergente. Por eso, lo primero que miraremos es si la "suma infinita" tiene sentido:

Def: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si lo es la sucesión $\{S_k\}$ de sus sumas parciales con $S_k = \sum_{n=1}^k a_n$. En ese caso se llama suma de la serie al $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$. Si la serie no converge, se dice divergente.

De la definición anterior y de las propiedades de los límites de las sucesiones se deduce inmediatamente que si suprimimos, cambiamos o añadimos un número finito de términos al principio de una serie, no se altera su carácter de convergencia o divergencia (aunque sí el valor de su suma, si es convergente).

(por eso, al hablar de convergencia podremos no escribir el n en que empezamos a sumar; incluso escribiremos sólo \sum)

También está claro (por las propiedades de sumas y productos de sucesiones) que si a_n y b_n convergen y si c es cualquier número real, también convergerán las series $\sum [a_n + b_n]$ y $\sum c a_n$ y que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n + b_n] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

¿Como saber en la práctica si una serie converge o no? ¿Cuánto vale su suma cuando es convergente? Veremos una serie de criterios que nos permitirán responder a la primera pregunta para muchas series, pero en casi todos los casos necesitaremos de calculadora u ordenador para dar simplemente un valor aproximado de la suma de una serie convergente. Dos casos en que se puede sumar la serie (excepcionales, porque podemos encontrar una expresión manejable de las sumas parciales) son:

Series geométricas (progresiones geométricas de infinitos términos):

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots \quad \text{Se tiene, si } r \neq 1, \text{ que } S_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}. \text{ Por tanto, si } |r| < 1, \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Y si $|r| \geq 1$ diverge, al hacerlo S_k (también si $r = \pm 1$: $1 + 1 + 1 + \dots$, $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ diverge)

Con lo anterior vemos que $1/5 + 1/5^2 + 1/5^3 + \dots = 1/5 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{5} \frac{1}{1-1/5} = \frac{1}{4} = 0.25$ como sospechábamos.

Series telescópicas: $\sum_{n=1}^{\infty} [b_n - b_{n+1}]$, entonces $S_k = [b_1 - b_2] + [b_2 - b_3] + \dots + [b_k - b_{k+1}] = b_1 - b_{k+1}$

Por tanto, la serie converge si y solo si $\{b_n\}$ converge y entonces su suma es: $b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln n - \ln(n+1)]$ es divergente, porque $\ln n$ diverge hacia $+\infty$.

Salvo en estos dos casos nos conformaremos con saber si la serie que tratamos converge o no y con la calculadora para aproximar su suma (cuando veamos series de Taylor en el capítulo 4 conoceremos la suma de alguna otra serie). Lo que sigue son los criterios más importantes para distinguir las series convergentes de las divergentes (hay más, pero aplicables en muy pocos casos prácticos).

El primer criterio permite identificar un montón de series divergentes (muchas veces a simple vista):

Teor:

Si a_n es convergente $a_n \neq 0$

 [La implicación opuesta al teorema () es falsa]

[Para que pueda ser algo finito la suma de infinitos números es necesario (no suficiente) que sean muy pequeños]

Como $a_n = S_n - S_{n-1}$, entonces $a_n \neq 0$, pues S_n y S_{n-1} tienen, desde luego, el mismo límite.

Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{20000n}$ es divergente, porque el término general a_n no tiende a 0 (tiende a $\frac{1}{20000}$).

$(-1)^n e^{1/n}$ diverge, porque a_n tampoco tiende a 0 (ni a nada; los pares tienden a 1 y los impares a -1).

Veamos que es falso, o sea, que no basta que el término general $a_n \neq 0$ para que la serie converja.

Para ello basta un contraejemplo: la "serie armónica"

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

diverge.

Sumamos números que tienden a 0, pero a pesar de ello la suma es "infinito" [es imposible verlo con calculadora: $S_1=1, S_2=1.5, \dots, S_{10}=2.929, \dots, S_{100}=5.187, \dots, S_{1000}=7.485, \dots$ no parece estabilizarse, pero los términos muy altos acabarían por no afectar al número de la pantalla, ya que la calculadora maneja sólo unos cuantos dígitos]:

Consideremos la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$, de sumandos menores que los de la armónica.

Tenemos entonces que: $S_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $S_4 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $S_8 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, \dots , $S_{2n} > 1 + \frac{n}{2}$.

Y por tanto la sucesión de sumas parciales de la serie armónica diverge (ni siquiera está acotada).

SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS,

$a_n \geq 0$

 [o de términos negativos, pues $a_n = -(-a_n)$].

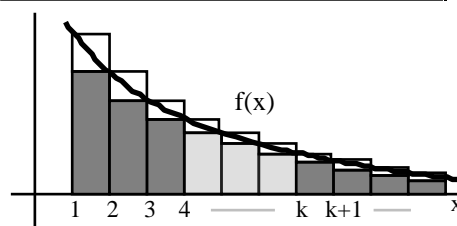
Observemos que entonces las sumas parciales forman una sucesión creciente. Veamos varios criterios de convergencia. El primero exige saber algo de integrales y límites de funciones, pero lo necesitamos para tratar las importantes series $(1/n^s)$. Se define $\int_a^b f(x)dx = \lim_{b \rightarrow a} \int_a^b f(x)dx$ si el límite existe y entonces diremos que la integral es convergente. Este criterio, además, es de los pocos que dan una cota del error cometido al sustituir la suma S de la serie convergente por la suma parcial k -ésima:

criterio integral:

Sea $f(x)$ función positiva y decreciente para $x \geq 1$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge. El error está acotado por $\int_{k+1}^{\infty} f(x)dx \leq S - S_k \leq \int_k^{\infty} f(x)dx$.

No lo demostramos. Recordando el significado geométrico de la integral, es intuitivamente claro a partir del dibujo:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge si $s > 1$ y diverge si $s \leq 1$



Si $s \leq 0$, el término general no tiende a 0 y la serie diverge.

Si $s > 0$, la función $f(x) = x^{-s}$ es positiva y decreciente y aplicamos el criterio anterior:

si $s \neq 1$, $\int_1^b x^{-s} dx = \frac{1}{s-1} [1 - b^{1-s}]$; si $s=1$, $\int_1^b x^{-1} dx = \ln b$.

Cuando $b \rightarrow \infty$, la primera integral tiene límite si $s > 1$ y si $0 < s < 1$. La segunda

Ej. Supongamos que para sumar la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \dots$ sumamos 50 términos.

Obtenemos $S_{50} = 1.201860\dots$ ¿Qué error E hemos cometido? El criterio integral nos dice que:

$$\int_{51}^{\infty} x^{-3} dx = \frac{1}{2} [-x^{-2}]_{51}^{\infty} = \frac{1}{2 \cdot 51^2} = 0.000192\dots \quad E = S - S_{50} \quad \int_{50}^{\infty} x^{-3} dx = \frac{1}{2} [-x^{-2}]_{50}^{\infty} = \frac{1}{2 \cdot 50^2} = 0.0002$$

El valor de la suma S (que no podemos hallar exactamente) está comprendido entre 1.202052... y 1.202060...

En los dos siguientes criterios compararemos nuestra serie con otra cuya convergencia conozcamos (normalmente con las $(1/n^s)$; por eso serán adecuados cuando hay como mucho potencias de n ; si aparecen términos mayores, como n en los exponentes o factoriales, suele ser mejor utilizar el cociente o la raíz que luego veremos).

criterio de comparación por desigualdades:

Si $0 < a_n \leq b_n$, entonces b_n converge $\Rightarrow a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(Y por tanto a_n diverge $\Rightarrow b_n$ diverge).

[Pero no se obtiene ninguna conclusión de que la mayor diverja o de que la menor converja].

Sean $S_k = a_1 + \dots + a_k$, $T_k = b_1 + \dots + b_k$. Son sucesiones crecientes con $0 < S_k \leq T_k$. Entonces: T_k convergente $\Rightarrow T_k$ acotada $\Rightarrow S_k$ acotada $\Rightarrow S_k$ convergente y $\lim S_k \leq \lim T_k$.

Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n + 1}{n^3 + n}$ converge, pues $0 < \frac{\ln n + 1}{n^3 + n} \leq \frac{2}{n^3}$ y sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ diverge, ya que $\frac{n+1}{n^2} \geq \frac{1}{n}$ y la serie armónica diverge (de $\frac{n+1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ no sacaríamos nada).

Lo podíamos afirmar sin el criterio: la suma de una serie a_n convergente y otra b_n divergente es divergente (si convergiese, $[a_n + b_n] - a_n = b_n$ convergería) y esto es lo que le pasa a nuestra serie: $\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right]$.

[Que conste que la suma o diferencia de dos series divergentes sí puede ser convergente].

Trabajar con desigualdades puede ser complicado, por eso suele ser bastante más útil:

criterio de comparación por paso al límite:

Sean $a_n, b_n > 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ (finito). Entonces:

Si $c > 0$, a_n convergente $\Leftrightarrow b_n$ convergente

Si $c = 0$, b_n convergente $\Rightarrow a_n$ convergente

Si $c > 0$, para $n \geq N$, $\frac{c}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3c}{2} \Rightarrow 0 < \frac{c}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3c}{2} b_n$ y aplicamos el criterio anterior.

Si $c = 0$, para $n \geq N$, $0 < \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \Rightarrow 0 < a_n \leq b_n$ y otra vez el criterio.

La parte del criterio con $c > 0$ permite determinar la convergencia de muchas series a simple vista, fijándose sólo en los términos n^s que "mandan" en numerador y denominador:

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2}$ diverge, porque $a_n \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, es decir, $\frac{a_n}{1/n} = \frac{n-1}{n} \rightarrow 1 > 0$ ($a_n \sim b_n$ representará que $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow c > 0$).

[La comparación por desigualdades no es adecuada a este caso (pues de la acotación sencilla $a_n \leq 1/n$ no sale nada); en cambio, el paso al límite no lo es para el primer ejemplo del criterio anterior (ya que $(\ln n + 1)/(n^3 + n)$ no se parece a $1/n^3$ pues $a_n/(1/n^3)$ no tiene límite; ésta es la situación típica para utilizar desigualdades)].

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sqrt{n}-173}{n^2 + \cos n}$ converge, pues $a_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ ($\frac{a_n}{1/n^{3/2}} = \frac{5-173/\sqrt{n}}{1+\cos n/n^2} \rightarrow 5 > 0$) y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente.

[Unos cuantos $a_n < 0$ no impiden aplicar criterios de términos positivos; la convergencia se mantiene quitándolos].

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{4n^2 + 3}$ converge, pues $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ (pues $\frac{a_n}{1/n^2} = \frac{\arctan n}{4 + 3/n^2} \rightarrow \frac{1}{4} > 0$, ya que $\arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2}$) y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

Cuando los términos que dominen contengan logaritmos habrá que aplicar la segunda parte (la de $c = 0$) de este criterio (porque $\ln n$ no es parecido a ninguna potencia de n):

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^4}$ converge, pues $\frac{\ln n/n^4}{1/n^3} = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge, pues $\frac{1/n}{\ln n/n} = \frac{1}{\ln n} \rightarrow 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (más pequeña) diverge [o por desigualdades][o por el integral].

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ converge, pues $\frac{\ln n/n^2}{1/n^{3/2}} = \frac{\ln n}{n^{1/2}} \rightarrow 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (para ésta hemos tenido que afinar un poco pues $1/n^2$ es convergente pero más pequeña que la nuestra y $1/n$ es mayor pero divergente).

SERIES DE TÉRMINOS CUALESQUIERA.

Dada a_n podemos considerar la serie, de términos positivos, de los valores absolutos $|a_n|$.

Teor: $|a_n|$ es convergente $\iff a_n$ es convergente [La implicación opuesta es falsa]

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|, \quad |a_n| \text{ converge} \implies [a_n + |a_n|] \text{ converge} \implies [a_n + |a_n|] - |a_n| = a_n \text{ converge}$$

es falso: pronto veremos series convergentes pero tales que $|a_n|$ diverge. Diremos que a_n es absolutamente convergente si $|a_n|$ es convergente (absolutamente convergente \iff convergente). Diremos que a_n es condicionalmente convergente si converge, pero no absolutamente.

Ej: $(-1)^n \frac{1}{n^2+1}$ es absolutamente convergente (y por tanto convergente) pues $\frac{1}{n^2+1}$ converge ($a_n \sim \frac{1}{n^2}$)

$$\frac{\cos n}{3^n} \text{ sin signo definido. } \frac{|\cos n|}{3^n} \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ geométrica convergente } |a_n| \text{ converge } \implies a_n \text{ converge.}$$

$$\frac{\cos n}{n}. \text{ De } \frac{|\cos n|}{n} \text{ no sacamos nada (es } \frac{1}{n} \text{ divergente). No sabremos en este curso decir si converge.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \text{ no es absolutamente convergente (} \frac{1}{n} \text{ diverge), pero converge } \underline{\text{condicionalmente}}$$

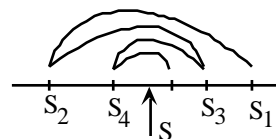
(hacia $\ln 2$ como se verá en series de Taylor) por el siguiente criterio para series alternadas ($+ - + - \dots$):

criterio de Leibniz: Si $\{a_n\}$ es decreciente y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ converge

Es fácil ver que por ser $\{a_n\}$ decreciente:

$$S_2 \leq S_4 \leq \dots \leq S_{2n} \leq \dots \leq S_{2n+1} \leq \dots \leq S_3 \leq S_1$$

Como S_{2n} y S_{2n+1} son monótonas y acotadas convergen (al mismo límite, pues $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \rightarrow 0$), con lo que la serie converge.



Sea S su suma. Se ve que para todo n es $|S_{2n} - S| \leq |S_{2n+1} - S|$. Se tiene además para el error $|S - S_N|$:

El error absoluto cometido al sustituir S por S_N es menor que el primer término a_{N+1} que se omite

$$0 \leq S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \quad |S - S_{2n}| \leq a_{2n+1}; \quad 0 \leq S_{2n-1} - S \leq S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n} \quad |S - S_{2n-1}| \leq a_{2n}.$$

Por tanto, N , par o impar, $|S - S_N| \leq a_{N+1}$.

[Si la serie es de la forma $(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - \dots$, el criterio y la cota del error absoluto son los mismos. No olvidemos que esta cota tan sencilla del error sólo se tiene para estas series de Leibniz. Para las series de términos positivos convergentes las sumas parciales S_n se van acercando a la suma formando una sucesión creciente y el error $S_N - S$ es, por tanto, mayor que el siguiente término a_{N+1} ; el único criterio que nos ha dado una cota del error es el integral (pero es un criterio aplicable a muy pocas series)]

Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ ya vimos que era absolutamente convergente; también podemos ver que converge por Leibniz, ya que es alternada, $\frac{1}{n^2+1} > 0$ y n es $\frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{[n+1]^2+1}$ (el denominador de la segunda fracción es mayor).

Estimemos el valor de su suma. Por ejemplo, sabemos que: $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{17} < S < \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$; es decir, $0.341176... < S < 0.4$, acotación nada precisa; si lo que queremos es hallar S con un error menor que 10^{-3} debe ser $a_{N+1} = \frac{1}{[N+1]^2+1} < \frac{1}{1000}$ $[N+1]^2 > 999$. Esto sucede si $N \geq 31$ (pues $31^2 = 961$, $32^2 = 1024$). Hay que sumar 31 términos [con ordenador (o mucha paciencia), $S_{31} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{962} \approx 0.364$].

$\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \dots$ es alternada y $a_n > 0$, pero no podemos aplicar Leibniz por no ser decreciente.

De hecho diverge: $S_2 = 1$, $S_4 = 1 + \frac{1}{2}$, ..., $S_{2n} = 1 + \dots + \frac{1}{n}$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Para las series (de términos positivos o de signo no definido) con n en los exponentes o factoriales son muy útiles los dos siguientes criterios (para las parecidas a $[1/n^s]$ no sirven):

criterio del cociente:

Sea $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r$. Entonces: si $r < 1$, a_n converge (absolutamente)
si $r > 1$ (ó $r = \infty$), a_n diverge

(y si $r = 1$, el criterio no decide: la serie puede converger o divergir)

$r < 1$: sea s con $r < s < 1$. N tal que si $n > N$ entonces $|a_{n+1}|/|a_n| < s$, es decir, $|a_{n+1}| < s|a_n|$.

Por tanto $|a_{n+k}| < \dots < s^k |a_n|$ si $n > N$. Así: $|a_n| = |a_N| + |a_{N+1}| + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{N+k}| < |a_N| \sum_{k=0}^{\infty} s^k$,
serie geométrica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

$r > 1$: N tal que si $n > N$ es $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, o sea, $|a_{n+1}| > |a_n|$ y no tiende a 0 el término general.

Cuando se vean muchas potencias n -simas (y no factoriales) en la serie conviene utilizar:

criterio de la raíz:

Sea $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = r$. Entonces si $r < 1$, a_n converge (absolutamente) y si $r > 1$, a_n diverge

(y si $r = 1$, de nuevo no sabemos; casi siempre es $r = 1$ a la vez utilizando el cociente y la raíz)

$r < 1$: $N/n > N$, $\sqrt[n]{|a_n|} < s$, $|a_n| < s^n$ $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ converge $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

$r > 1$: $N/n > N$, $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, $|a_n| > 1$ y no tiende a 0 el término general.

Ejemplos: $\frac{1}{n^s}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^s}{(n+1)^s} < 1$; $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{(n^{1/n})^s} < 1$. Ni cociente ni raíz deciden.

$\frac{(-3)^n}{3+n!}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}}{3+(n+1)!} \cdot \frac{3+n!}{3^n} = 3 \frac{3/n! + 1}{3/n! + n+1} < 1$. Es convergente (absolutamente).

[Por Leibniz es complicado y con la raíz no lo sabemos hacer pues desconocemos como va $(n!)^{1/n}$]

$\frac{n!}{n^n}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < \frac{1}{e} < 1$. Converge.

[Y de paso deducimos también que $n!/n^n \rightarrow 0$, límite que no es trivial calcular]

$\frac{1}{(\ln n)^n}$. $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\ln n} < 1$. Converge.

$\left[\frac{n}{n+2}\right]^{n^2}$. $\sqrt[n]{a_n} = \left[1 - \frac{2}{n+2}\right]^n = \left[\left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^{-(n+2)/2}\right]^{-2n/(n+2)} \approx e^{-2} < 1$. La serie converge.

$(-1)^n 2^n 7^{-\sqrt{n}}$. $\sqrt[n]{|a_n|} = 2 [7^{-n^{1/2}}]^{1/n} = 2 \cdot 7^{-1/n^{1/2}} < 2$; o bien,

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2 \frac{7^{\sqrt{n}}}{7^{\sqrt{n+1}}} < 2$ (porque $7^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} < 1$ [el exponente < 0]). Diverge.

$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$. $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n^{1/n}} > 1$. La raíz no decide (y eso que tenía pinta de ser el criterio adecuado).

Cuando $r = 1$ probablemente haya que aplicar desigualdades o paso al límite:

Por : $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n}$ divergente la nuestra es divergente.

Por : $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \sim \frac{1}{n}$ (puesto que $\frac{a_n}{1/n} = \left[\frac{n+1}{n}\right]^n \rightarrow e$) la nuestra diverge.

En los dos siguientes discutimos la convergencia dependiendo de los valores de los a y b que aparecen:

$$\frac{n^a}{b^n}, \text{ con } a > 0, b > 0. \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^a |b|^n}{n^a |b|^{n+1}} = \frac{(1+1/n)^a}{|b|} \quad \frac{1}{|b|} \quad (\text{o bien } \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(n^{1/n})^a}{|b|} \quad \frac{1}{|b|})$$

Cociente y raíz dicen que la serie converge para $|b| > 1$ (y de aquí $n^a/b^n \rightarrow 0$ para $|b| > 1$) y que diverge para $|b| < 1$. Para $b = \pm 1$ los criterios no deciden, pero está claro que diverge porque el término general no tiende a 0 (bastaba esto para decir que divergía para $|b| = 1$).

$$\frac{b^n}{n!} \cdot \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|b|^{n+1}/(n+1)!}{|b|^n/n!} = \frac{|b|}{n+1} \rightarrow 0. \text{ Convergente para cualquier } b, \text{ por gordo que sea.}$$

Por tanto, $b^n/n! \rightarrow 0$ $\forall b$, otro límite no fácil de calcular directamente.

Estos ejemplos y otros que hemos visto nos permiten comparar la rapidez con que varias sucesiones se van al ∞ . El símbolo \ll representará que lo de la izquierda dividido entre lo de la derecha tiende a 0 cuando n tiende a ∞ :

$$\ln n \ll n^a, a > 0 \ll b^n, b > 1 \ll n! \ll n^n$$

Acabamos con dos "series de potencias" (las trataremos a fondo en 4.3). Estudiemos para qué x convergen:

$$\frac{x^{2n}}{4^n n^2} \cdot \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^2 n^2}{4(n+1)^2} \cdot \frac{|x|^2}{4} ; \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|^2}{4n^{2/n}} \quad \frac{|x|^2}{4} \text{ pues } [n^{1/n}]^2 \rightarrow 1^2.$$

Por tanto, la serie converge si $|x| < 2$ y diverge si $|x| > 2$. Si $|x| = 2$ ($x = \pm 2$) estos criterios no deciden, pero entonces $1/n^2$ converge como ya sabemos. En resumen, converge si $x \in [-2, 2]$.

$$\frac{x^n}{\ln n} \cdot \text{Si } |x| < 1, \quad \frac{|x|^n}{\ln n} < |x|^n \text{ y } |x|^n \text{ geométrica convergente } \rightarrow \text{ la serie converge (absolutamente).}$$

$$\text{Si } x = 1, \quad \frac{1}{\ln n} \text{ diverge, porque } \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \text{ y } \frac{1}{n} \text{ es divergente.}$$

$$\text{Si } x = -1, \quad \frac{(-1)^n}{\ln n} \text{ converge por Leibniz } \left(\frac{1}{\ln n} \rightarrow 0 \text{ y es decreciente porque } \ln n \text{ crece} \right).$$

Si $|x| > 1$, el término general no tiende a 0 (pues si $|x| > 1$ es $\ln n \ll |x|^n$) y diverge.

La serie converge si $x \in [-1, 1]$.

[Cuando estudiemos la regla de L'Hôpital lo natural será aplicar cociente:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \rightarrow |x|, \text{ porque } \lim_x \frac{\ln x}{\ln(x+1)} = \lim_x \frac{1/x}{1/(x+1)} = \lim_x \frac{x+1}{x} = 1].$$